

自由境界 Allen–Cahn エネルギーの特異極限について*

東京科学大学 理学院数学系数学コース
田代紀一 (Kiichi TASHIRO) †

概要

自由境界問題とは、未知関数 u と未知領域 Ω の両方について解く必要のある、偏微分方程式のことである。解く前には与えられていない領域 Ω の境界のことを、一般に自由境界という。自由境界問題は興味深い偏微分方程式の一分野というだけでなく、燃焼面の動き、氷の融解、相分離過程などの応用があり、理論的にも工学的にも重要な対象である。

本稿では、次の自由境界 Allen–Cahn 方程式

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{|u| < 1\}, \\ |\nabla u| = 1/\varepsilon & \text{on } \partial\{|u| < 1\} \end{cases}$$

の解について、 $\varepsilon \rightarrow +0$ というある種の特異極限を取った際のふるまいについて考察する。特に主目的として、Hutchinson–Tonegawa による Allen–Cahn 方程式の解に対して知られていた、解が varifold の意味で極小曲面に収束することの概略を、自由境界型の設定に対して与えることが目的である。

1 導入: Allen–Cahn エネルギーと方程式

本稿で主に扱う Allen–Cahn エネルギーとは、次の Dirichlet エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で定義されるエネルギーのことである：

$$\mathcal{J}_\delta^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{W_\delta(u)}{\varepsilon} dx \quad \text{for } \delta \in [0, 2] \text{ and } u \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n; [-1, 1]).$$

ここで、ポテンシャル項 W_δ は

$$W_\delta(u) = \begin{cases} (1 - u^2)^\delta & \text{for } 0 < \delta \leq 2 \\ \chi_{(-1,1)}(u) & \text{for } \delta = 0 \end{cases}$$

であるし、 \mathbb{T}^n は n 次元トーラス、すなわち $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ であるとする。この $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ について、パラメータが $\delta = 2$ であるとき、通常の、あるいは classical Allen–Cahn エネルギーであるという。ポテンシャルのパラメータについて $\delta \rightarrow +0$ という極限を考えると、 $u = \pm 1$ のときは 0、それ以外のときは 1 という値をとる。そのため $\delta = 0$ であるときは、ポテンシャルは(不連続な) 特性関数であると定義し、このとき $\mathcal{J}_0^\varepsilon$ は自由境界 Allen–Cahn エネルギーであるという¹。Allen–Cahn エネルギーは、容器の中に水蒸気を詰めた際の水と水蒸気の平衡状態を探す問題から考案された。

*本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費（課題番号:25KJ1245）の助成を受けたものです。また、本研究は、Jingeon An 氏 (Univ. Basel) との共同研究に基づくものです。

†E-mail:tashiro.k.0e2f@m.isct.ac.jp Address: 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1

¹ $0 < \delta < 2$ のときでも $|\nabla u| = 0$ on $\partial\{|u| < 1\}$ という自由境界が現れるが、今回は連続でないポテンシャルを考える必要のある $\delta = 0$ に話題を絞る。

このエネルギーを、例えば体積保存条件 $\int_{\mathbb{T}^n} u \, dx = m$ などの適切な条件の下で最小化する問題を $\varepsilon \ll 1$ に対して考えると、最小化関数 u はポテンシャル項の影響により概ね $u \approx \pm 1$ となり、これは化学物質を $\{u \approx 1\}$ と $\{u \approx -1\}$ の二相に分離する影響を表している。加えて Dirichlet エネルギーが u の振動を抑える効果を持つことにより、二つの領域はある程度整った形になることが想像できる。そのため化学的な背景を鑑みると、確かに Allen–Cahn エネルギーは二物質の相分離を説明していると解釈できる。本稿ではこのエネルギーの化学的な導出や歴史には触れないが、興味のある読者は例えば利根川吉廣教授による論説 [利根川 05] を参照されたい。

次に“自由境界”と呼ばれる由来を、エネルギーの Euler–Lagrange 方程式を求ることで説明する。まず $\delta = 2$ のときの汎関数の第一変分を計算してみる。任意のテスト関数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ に対して、

$$\frac{\mathcal{J}_2^\varepsilon(u + t\phi) - \mathcal{J}_2^\varepsilon(u)}{t} = \int_{\mathbb{T}^n} 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{W_2(u + t\phi) - W_2(u)}{t} \, dx$$

が得られる。Euler–Lagrange 方程式とは汎関数の停留点となる関数が満たすべき方程式であった。上記の式で $t \rightarrow 0$ として $= 0$ を考えると、

$$-\int_{\mathbb{T}^n} 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{W'_2(u)}{\varepsilon} \phi \, dx$$

が得られる。左辺を部分積分し、変分法の基本補題を用いることで、

$$\varepsilon \Delta u = \frac{W'_2(u)}{2\varepsilon} = \frac{2u(1-u^2)}{\varepsilon} \quad (1.1)$$

という方程式を得ることができる。これが(通常の)Allen–Cahn 方程式である。上の計算は関数を摂動する外在的な変分であるが、 $\delta = 0$ のときはポテンシャルが不連続関数であることからこの変分と相性が悪い。そのため変数を任意のテストベクトル場 $B \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ で摂動する $x \mapsto x + tB(x)$ という、いわゆる内在的な変分を考える必要がある。簡略化のための記号として $\Psi_t(x) = x + tB(x)$ 、 $\Phi_t(x) = \Psi_t^{-1}(x)$ 、 $u_t = u \circ \Phi_t$ とおく。変数変換 $y = \Phi_t(x)$ を行うことで、Dirichelt エネルギーについて

$$\int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon |\nabla u_t|^2 \, dx = \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon \nabla u(y) \cdot ((D\Psi_t(y))^{-T} (D\Psi_t(y))^{-1}) \nabla u(y) |\det(D\Psi_t(y))| \, dy$$

と計算できる。ベクトル場に対する D はヘシアン行列を表すとする。ベクトル場 Ψ_t において、

$$D\Psi_t = I_n + tDB, \quad (D\Psi_t)^{-1} = I_n - tDB + o(t), \quad \det(D\Psi_t(y)) = 1 + t \operatorname{div} B + o(t)$$

となることに注意すると、上記の式は

$$\int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon |\nabla u_t|^2 \, dx = \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon |\nabla u|^2 \, dx + t \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon (|\nabla u|^2 \operatorname{div} B - 2\nabla u \cdot DB \nabla u) \, dx + o(t)$$

となる。ポテンシャル項は、領域 $\{|u| < 1\}$ の面積を変分すればよいことから、上記の $\det(D\Psi_t(y))$ の式とあわせることで、

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi_{(-1,1)}(u_t)}{\varepsilon} \, dx = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi_{(-1,1)}(u)}{\varepsilon} + \frac{t}{\varepsilon} \operatorname{div} B \, dx + o(t)$$

であることがわかる。よって $\mathcal{J}_0^\varepsilon$ の(内在的)変分が 0 であるとすると、

$$0 = \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon (|\nabla u|^2 \operatorname{div} B - 2\nabla u \cdot DB \nabla u) + \frac{t}{\varepsilon} \operatorname{div} B \, dx$$

が得られる. ここで議論のために $\partial\{|u| < 1\}$ が C^2 であるとする. ポテンシャルエネルギーの変分からくる項 $\int \operatorname{div} B dx$ は, 発散定理を用いることにより $\overline{\operatorname{supp} B} \subset \{|u| < 1\}$ であるときに消える. そのため停留点 u は, 気合を入れて部分積分することで, $\Delta u = 0$ in $\{|u| < 1\}$ を満たす必要があることがわかる. また, 上記の式に対してもう一度気合を入れて部分積分を連打することにより, 実は境界 $\partial\{|u| < 1\}$ 上で $|\nabla u| = 1/\varepsilon$ が成り立たなければならないことがわかる. どのように気合を入れればよいかについては, 例えば [Vel23, Section 9.2] を参照のこと. このように Euler–Lagrange 方程式を汎関数から導出する際に, 領域 $\{|u| < 1\}$ の境界上で u が満たすべき条件が自然に決まり, かつ u を決定することが領域 $\{|u| < 1\}$ を決定することにつながるため, $\delta = 0$ は自由境界 Allen–Cahn エネルギーと呼ばれる. そして, u が自由境界 Allen–Cahn 方程式の解であるということが次のように定義される.

Definition. 関数 $u_\varepsilon : \mathbb{T}^n \rightarrow [-1, 1]$ をリップシット, すなわちほとんど至る所で $|\nabla u| \leq C$ なる定数 $C < \infty$ があるとする. この u_ε が自由境界 Allen–Cahn 方程式の古典解であるとは,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{|u| < 1\}, \\ |\nabla u| = 1/\varepsilon & \text{on } \partial\{|u| < 1\} \end{cases} \quad (1.2)$$

を満たしかつ $\partial\{|u| < 1\}$ が局所的に C^2 グラフで表示できるときのことをいう.

2 先行研究: Allen–Cahn エネルギー $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ の歴史

2.1 Classical Allen–Cahn エネルギーと極小曲面論について

Allen–Cahn エネルギーは化学的な背景から導入されていると前章で言及したが, 純粹数学の世界では幾何学的なつながり, 特に極小曲面の理論と強い結びつきがあることが知られている. 極小曲面とは, 平均曲率が至る所 0 であるような曲面のことである. 変分法の言葉で説明すると, 曲面積を曲面に対する汎関数であると考えたとき, この汎関数の停留点が極小曲面になることが知られている. Allen–Cahn 方程式は曲面ではなく関数に対する汎関数であるためぱっと見では関連は見られないが, $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときのふるまいを観察することで, 極小曲面との関連を見出すことができる. 以下では $\delta = 2$ としてそのつながりを見ていく. 各 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対し, $\mathcal{J}_2^\varepsilon$ を(局所的に)最小化する関数を u_ε とする. 補助的に

$$\varphi(s) = \int_{-1}^s \sqrt{2W_2(s)} ds, \quad w_\varepsilon(x) = \varphi \circ u_\varepsilon(x)$$

という関数を導入する. 最小化されている事実から, $\sup_\varepsilon \mathcal{J}_2^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ であるとすることができるため, u_ε と w_ε について

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla w_\varepsilon| dx &= \int_{\mathbb{T}^n} \sqrt{2W_2(u_\varepsilon)} |\nabla u_\varepsilon| dx \leq \mathcal{J}_2^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C, \\ \int_{\mathbb{T}^n} W_2(u_\varepsilon) dx &= \int_{\mathbb{T}^n} (1 - u_\varepsilon^2)^2 dx \leq \varepsilon \mathcal{J}_2^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \varepsilon C, \end{aligned}$$

という式を得ることができる. 上記の一式目と関数解析におけるコンパクト性の議論から, 必要なら部分列をとることにより, $w_\varepsilon \rightarrow w_0$ (a.e.) なる関数 w_0 をとることができ. また逆関数を取ることで $u_0 = \varphi^{-1} \circ w_0$ という関数が得られ, この関数についても $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ (a.e.) が成り立つことがわかる. 上記の二式目から, $u_0 \equiv \pm 1$ (a.e.) でなければならない. そのためある集合 E を用いて,

極限の収束先を $u_0 = 2\chi_E - 1$ と書くことができる。加えて、任意のベクトル場 $B \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ に対して、発散定理と収束を考えることで

$$\int_{\mathbb{T}^n} B \cdot \nabla u_\varepsilon dx = - \int_{\mathbb{T}^n} u_\varepsilon \operatorname{div} B dx \rightarrow - \int_{\mathbb{T}^n} u_0 \operatorname{div} B dx$$

がわかる。上記右辺は再度発散定理を用いると、 ∇u_ε という関数は ∂E に積分を通して収束していることがうかがえる。すなわち Allen–Cahn エネルギーを最小化する関数は、ある集合 E を ε を用いて“拡散”したものになっていることが観察され、Allen–Cahn エネルギーは“拡散”した曲面積に対応する。加えて、 u_ε が最小化されているという事実から、Modica–Mortola [MM77] や Modica [Mod87] により、 ∂E は表面積汎関数の(局所)最小化曲面、すなわち極小曲面であることが知られている。

では、 u_ε が単に停留点であり、エネルギーが ε によらず有界であるとだけ仮定するとどうなるだろうか。上記の議論自体は最小化であるという性質をエネルギーの有界性にしか使っていないうえに、すでに偏微分方程式が得られていることから比較的簡単に収束先を調べることができそうである。Modica らの議論を最小性を使わずに言えば同様の極小曲面への収束が示せそうであるが、実はいくつか困難点がある。一つは、Allen–Cahn エネルギーと極小曲面の関係は表面積汎関数によってつながっているため、すべて積分の意味で解釈しなおす必要がある点である。Allen–Cahn エネルギーは拡散した曲面積であるため、 $\varepsilon \rightarrow +0$ とすれば曲面積に集中しそうである。しかし関数の収束先がとれたとしても、エネルギーの収束に対しては下半連続性しか保証できないことから、

$$(\text{Allen–Cahn エネルギー}) \rightarrow (\text{曲面積汎関数})$$

のような直接的収束は期待できない。また、解のレベルセット $\{u_\varepsilon = t\}$ の曲率を計算したとしても $\varepsilon \rightarrow +0$ のふるまいがうまくいく式にならず、 t について積分平均を考える必要性が表れる。二つ目は、Allen–Cahn エネルギーは極小曲面を“拡散”して近似しているため、近似による誤差が出てくるだろうということである。実際、 $\{u_\varepsilon = t\}$ の曲率の積分平均を計算すると $\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 - W_2(u_\varepsilon)/\varepsilon$ という誤差項が現れるため、この項について評価が必要になる。解 u_ε が何かしらの意味で最小化されている場合であれば、上記の問題点をエネルギーの変分に直接テスト関数をうまく入れることで解決できる。しかし停留点であるというだけでは、不思議な言い回しだが u_ε は偏微分方程式の解であること“だけ”しか使えないことが問題になる。これらの点について、曲面を積分の意味で一般化する varifold の枠組みを用いて、単調性公式や比較原理を駆使して収束先が超関数の意味で極小曲面になることが Hutchinson–Tonegawa ([HT00]) により証明された。

2.2 自由境界 Allen–Cahn 方程式について

ポテンシャル項に対する定数が $\delta = 2$ であるときとの類似で、 $\delta = 0$ であるときも前章のような極小曲面との関連があるのでないかと考えられる。エネルギー $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ を $\delta \in [0, 2)$ の場合に初めて導入したのが Caffarelli と Córdoba であり、彼らは論文 [CC95] で、 $\delta \in [0, 2]$ の場合に、 $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ を最小化する関数 u_ε のレベルセット $\{u_\varepsilon = t\}$ が一様に極小曲面へ収束することを示した。また彼らは続く論文 [CC06] で、最小化関数のレベルセットは Lipschitz であり、さらに $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ の停留点が Lipschitz グラフで表示できるならそのグラフは $C^{1,\alpha}$ 正則性を持つことを証明した。これらの結果は ($\delta = 2$ の状況も含めて)、 $\mathcal{J}_\delta^\varepsilon$ と極小曲面の理論の深いつながりを表している。他にも自由境界に関する研究は膨大な結果が知られており、例えば [DGW22, Kam13, LWW18, Val04, Val06, Wan15] などがあげられる。

一方で, $\delta = 2$ の場合で出てくる方程式 (1.1) ではなく, わざわざ自由境界を含んだ問題を考える意味はあるのか? という自然な問い合わせられるだろう. この問い合わせに対する答えは, 「自由境界問題は非線形項が自由境界に“集中”しているため, 実際に考察する関数自体は非常に性質の良い調和関数となり, classical Allen–Cahn 方程式より扱いやすいものである」となる. 他にも, 自由境界 Allen–Cahn 方程式の解 u は概ね傾き $1/\varepsilon$ を持ち, 領域 $\{|u| < 1\}$ を隔てて二つの相 $\{u = 1\}$ と $\{u = -1\}$ がきっちり分離されているため研究しやすいと言える. 通常の Allen–Cahn 方程式の解では二相は“ぼんやりと”分離されているため, この分離をコントロールしているポテンシャルからくる非線形項を相手にしなければならない.

近年, このシンプルな構造からくる解析のしやすさを利用した自由境界 Allen–Cahn 方程式の研究が始まってきており, ある部分では classical Allen–Cahn 方程式よりも強い結果が得られている. 例えば, An は [An25]において, Lipschitz グラフで表示できる自由境界 Allen–Cahn 方程式の解は, $C^{2,\alpha}$ 正則性を持つことを非常に簡潔な議論で証明している. キーアイデアは, 解のレベルセットの幾何学的な量をレベルセット方向に沿って微分し自由境界条件を用いて性質の良い ODE を導出するというもので, 解の持つ幾何学的な性質をよく反映した論法である. 類似の結果は classical な場合にも知られており, Wang と Wei ([WW19a, WW19b]) により, 解が安定²かつ $n \leq 10$, あるいはモース指数³が有限かつ $n \leq 2$ のときにレベルセットの $C^{2,\alpha}$ 正則性を示している. これらの結果は非線形項からくる困難点を, 複雑な比較関数の設定と Toda システムからくる難解な証明によって対処しており, かつ次元や解の性質に仮定をつけたものになっている. 他にも自由境界 Allen–Cahn 方程式の簡潔さを示す結果として, 従来知られていなかった高次元での De Giorgi 予想⁴の(自由境界型の設定に対しての)解決 [CFRFS25] が知られている.

3 主定理

主定理を述べる前に, 本稿の研究の動機について説明する. Allen–Cahn エネルギーが極小曲面論と強いつながりを持つという文脈の中で, Chodosh と Mantoulidis は [CM20] において, 以下の Yau の予想と呼ばれる問題を Allen–Cahn 方程式を用いて解決した:

「任意の三次元閉リーマン多様体には, 無限個の滑らかなかつ閉なはめ込まれた極小曲面が存在する.」

証明の主な方針は [WW19a, WW19b] の論法を, 三次元閉リーマン多様体上に拡張するというものである. 一方で, Allen–Cahn エネルギーを用いる方法と別の考え方から, Song が [Son23] で多様体の次元を $3 \leq n \leq 7$ に拡張した結果を得ている. このことから Allen–Cahn エネルギーを用いた証明も高次元に拡張できるだろうと考えられる. ここで An による正則性の結果 [An25] に次元の制約がないことを思い出すと, 自由境界 Allen–Cahn エネルギーは通常の Allen–Cahn エネルギーより Yau の予想に適しているのではと期待できる. しかし自由境界 Allen–Cahn 方程式を用いたアプローチのために, まず自由境界 Allen–Cahn 方程式からそもそも極小曲面が構成できるのか? という根本的な問題を考える必要があり, 本稿の目的はこの問題に解答を与えることである.

本稿の主定理は, Hutchinson–Tonegawa 型の収束定理, すなわち Allen–Cahn 方程式の解は $\varepsilon \rightarrow +0$ という極限を考えることで極小曲面が現れるという定理が, 自由境界 Allen–Cahn 方程式 (1.2) の解に対しても証明されたというものである. 具体的には以下の定理が主定理となる.

² 安定とは, 汎関数の第二変分が非負であること.

³ モース指数が m であるとは, 汎関数の第二変分が負となるような関数が, 考えている関数空間内で m 次元であること.

⁴ 全空間 \mathbb{R}^n 内において, n 方向の偏微分が常に正な Allen–Cahn 方程式の解は $2 \leq n \leq 8$ なら一次元的であるという予想.

Main Theorem ([AT25a]). 各パラメータ $\varepsilon \in (-1, 1)$ について, u_ε を自由境界 Allen–Cahn 方程式 (1.2) の解とする. さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} dx \leq C < \infty$$

が成り立つとする. このとき, $d\mu_\varepsilon = (\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon}) dx$ とおくと, 必要ならさらに部分列を取ることで $u_\varepsilon \rightarrow u_0 \in BV(\mathbb{T}^n; \{\pm 1\})$ (a.e.), $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$ なる関数 u と Radon 測度 μ を取ることができる. さらに, μ について以下が成り立つ:

1. μ は可算修正可能 $(n-1)$ -Radon 測度. すなわち, ある可算個の $(n-1)$ 次元 C^1 多様体の族 M_i が存在して $\mathcal{H}^{n-1}(M \setminus \bigcup_i M_i) = 0$ となるような \mathcal{H}^{n-1} -可測な集合 M が存在し, かつ M 上の \mathcal{H}^{n-1} -可積分関数 $\theta : M \rightarrow [0, \infty)$ が存在して $\mu = \theta \mathcal{H}^{n-1}|_M$ と表せる. ここで \mathcal{H}^{n-1} は \mathbb{T}^n 上の $(n-1)$ 次元 Hausdorff 測度.
2. $\mu = \theta \mathcal{H}^{n-1}|_M$ は超関数の意味で極小曲面である. すなわち,

$$\int_{\mathbb{T}^n} \text{tr}(P_{T_x M} \circ \nabla B) d\mu = 0 \quad \text{for all } B \in C_c^1(B_1; \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ. ここで, tr は行列のトレース作用素, $P_{T_x M}$ は接平面 $T_x M$ への射影行列. 注意として, M は \mathcal{H}^{n-1} 測度の意味でほとんど至る所 C^1 多様体であるとみなせるので, その意味で接平面 $T_x M$ がほとんど至る所で定義できる. この等式は μ に対する (内在的変分と同じように計算した) 第一変分となっており, μ が滑らかな多様体 M を用いて $\mu = \mathcal{H}^n|_M$ と表示できたと仮定すると, 部分積分から上の式は平均曲率が積分記号化で 0 であることを表している.

3. 各 $K \subset\subset \mathbb{T}^n$ に対し, $\partial\{|u_\varepsilon| < 1\} \cap K$ は $\text{spt } \mu \cap K$ に Hausdorff 距離の意味で収束する.
4. ε によらない定数 $\tilde{C} > 0$ があって $\|\nabla^2 u_\varepsilon\|_{L^\infty(\{|u_\varepsilon| < 1\})} \leq \tilde{C}/\varepsilon^2$ であると仮定すると, 2 の θ は \mathcal{H}^{n-1} -a.e. で非負の整数値となる.

Remark. 上記は [CC95, CC06, CFRFS25] の結果と異なり, 解 u_ε に対し, 最小化関数であることや安定であることを仮定していない. 一方で, [HT00] では u_ε が $\mathcal{J}_2^\varepsilon$ の停留点, すなわち (1.1) の解であるとしか仮定しておらず, 本講演の主定理の仮定よりさらに弱い状況で収束性を議論している. 関数 u_ε が $\mathcal{J}_0^\varepsilon$ の停留点であるとき, [De09] により u_ε は (1.2) の粘性解であることが知られているが, $\partial\{|u_\varepsilon| < 1\}$ が C^2 であるかはこの段階では非自明である. 粘性解であるという仮定のみで, 本稿での主結果と同じ結論が得られるかは興味深い問題である. また, θ が整数値となる主張に追加の仮定がついているが, これも元々の [HT00] にはなかったものである. この仮定がいつ成り立つか, あるいは成り立たない例が存在するのかについても興味深い問題であると言える.

4 証明の概略

Main Theorem 3, 4 の内容は非常に技巧的であるので, 本稿では説明しない. 証明の概略の前に, 極小曲面への弱い意味での収束を考えるために, 一般化された曲面のクラスである varifold について軽く紹介する.

Definition. 集合 $\mathbf{G}(n, n-1)$ ⁵ を \mathbb{R}^n 内の $(n-1)$ 次元部分空間全体とし, 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して $G_{n-1}(\Omega) = \Omega \times \mathbf{G}(n, n-1)$ とおく. この集合 $G_{n-1}(\Omega)$ 上の Radon 測度を varifold という. また,

$$\|\mathbf{v}\|(A) = \mathbf{v}(A \times \mathbf{G}(n, n-1)) \text{ for } A: \text{Borel set}$$

と定める.

Varifold V が単に積測度 $d\mu|_{x \in \Omega} \times d\beta|_{S \in \mathbf{G}(n, n-1)}$ であると思ったとき, Ω での積分 μ が曲面積測度を表し, $\mathbf{G}(n, n-1)$ での測度 β が曲面の接平面が何であるかを超関数の意味で表していると解釈できる. とはいってもこの定義はあまりにも抽象的で, 曲面の一般化ができているように思えない. 実用的には Main Theorem の 1 で紹介した可算修正可能 Radon 測度というものがよく使われる. 実際, 可算修正可能 Radon 測度 $\mu = \theta \mathcal{H}^{n-1}|_M$ は, 任意のテスト関数 $\phi \in C_c(G_{n-1}(\Omega); [0, \infty))$ に対して

$$\mathbf{v}_\mu(\phi) := \int_{G_{n-1}(\Omega)} \phi(x, T_x M) d\mu(x),$$

すなわち対応する varifold を $\mu \times \delta_{T_x M}$ と考えることで, Riesz の表現定理から μ を varifold であると合理的にみなすことができる. 一方で varifold は単に Radon 測度であるだけしているので, 部分列を抜き出して収束先をとるコンパクト性定理を簡単に証明できるメリットがある. つまり $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときのふるまいを, 上記の varifold を使って収束先を保証し, その後収束先の Radon 測度が何者であるかを調べるとよさそうである. では Allen–Cahn 方程式の解 u_ε から, 次のように varifold を定義しよう: 任意の $\phi \in C_c(G_{n-1}(\mathbb{T}^n); [0, \infty))$ に対し,

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\phi) := \int_{\{|\nabla u_\varepsilon| \neq 0\}} \phi \left(x, I - \frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|} \otimes \frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|} \right) \left(\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx.$$

この測度に対してコンパクト性定理を使い, 収束先となる varifold \mathbf{v} をとったとする. この測度が Main Theorem 1 のようになっているかを判定するのに, 次の Allard の判定法 ([All72, 5.5 (1)]) が有効である.

Proposition. Varifold \mathbf{v} の第一変分を (内在的変分と同じように計算することで)

$$\delta\mathbf{v}(B) = \int_{G_{n-1}(\Omega)} \text{tr}(S \circ \nabla B(x)) d\mathbf{v}(x, S) \text{ for } B \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

とする. 第一変分が局所有界である, すなわちある定数 $C < \infty$ があって $|\delta\mathbf{v}(B)| \leq C \sup |B|$ であるとし, 密度関数について

$$0 < \liminf_{r \rightarrow +0} \frac{\|\mathbf{v}\|(B_r(x))}{r^{n-1}} \leq \limsup_{r \rightarrow +0} \frac{\|\mathbf{v}\|(B_r(x))}{r^{n-1}} < \infty$$

が $\|\mathbf{v}\|$ -ほとんど至る所で成り立っているとすると, この \mathbf{v} は修正可能 Radon 測度で表示できる.

以上により収束先としてとった varifold \mathbf{v} に対して必要な評価は, 収束先が極小曲面であることを期待していることから, $\delta\mathbf{v}$ が 0 となることと, 修正可能であることを保証するための密度関数の評価の二つであることがわかる. 近似 varifold \mathbf{v}_ε に対して第一変分を計算すると, u_ε が (1.2) の解であることも考慮すると, 任意の $B \in C_c^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ に対し

$$\delta\mathbf{v}_\varepsilon(B) = - \int_{\{|\nabla u_\varepsilon| \neq 0\}} \text{tr} \left(\left(\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|} \otimes \frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|} \right) \circ \nabla B \right) \left(\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 - \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$$

⁵ この集合の平面を射影行列と同一視し, 行列がなす空間としてのノルムを考えることで, $\mathbf{G}(n, n-1)$ はコンパクトな位相空間となる.

となる. つまりこの厄介者 $\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 - \chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)/\varepsilon$ が $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときに 0 となるかが鍵になる. 密度関数の評価に対しても第一変分の誤差に対しても, (1.2) に $\nabla u_\varepsilon \cdot B$ をかけて部分積分をすることで得られる次の単調性公式が鍵となる:

Proposition. 任意の $B_r(x) \subset \mathbb{T}^n$ に対して,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_r(x) \cap \{|u_\varepsilon| < 1\}} \left(\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x) \cap \{|u_\varepsilon| < 1\}} \left(\frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} - \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 \right) + \frac{2\varepsilon}{r^{n+1}} \int_{\partial B_r(x) \cap \{|u_\varepsilon| < 1\}} ((y-x) \cdot \nabla u_\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

が超関数の意味で成り立つ.

この単調性公式と, 比較原理から得られる Modica の不等式 $|\nabla u_\varepsilon| \leq 1/\varepsilon$ を組み合わせることで, $\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 - \chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)/\varepsilon$ が 0 に収束しないと仮定すると, この誤差項が単調性公式では $1/r^n$ がかかったものとして現れることから, 密度関数が際限なく大きくならなければならない. しかしそれはエネルギーの上からの有界性 $\mathcal{J}_0^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ に矛盾するため, 誤差項が消えなければならない.

実はここまで議論は, Hutchinson-Tonegawa [HT00] による議論と同じである. 一方で同じといかない部分があり, それは密度関数の下からの評価である. どのような違いが表れるかを説明する. まず $\|\mathbf{v}\|$ の測度が表れる点 x をとる, すなわち任意の $r > 0$ に対して $\|\mathbf{v}\|(B_r(x)) > 0$ となるような点をとる. 測度 \mathbf{v} は \mathbf{v}_ε の収束先であることから, 測度ができる点 x というのは $\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 + \chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)/\varepsilon$ の値ができる点であると考えられる. そのため $x_\varepsilon \in \{|u_\varepsilon| < 1\}$ をうまくとることで $x_\varepsilon \rightarrow x$ であるとできる. この事実を用いて密度を ε の世界に戻して計算すると, 単調性公式とリスケーリングにより,

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{v}\|(B_r(x))}{r^{n-1}} &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_{r/2}(x_\varepsilon) \cap \{|u_\varepsilon| < 1\}} \left(\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx \\ &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{n-1}} \int_{B_\varepsilon(x_\varepsilon) \cap \{|u_\varepsilon| < 1\}} \left(\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{\chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx \\ &\geq \frac{1}{2^{n-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{B_1(0) \cap \{|u_\varepsilon(\varepsilon(\cdot) + x_\varepsilon)| < 1\}} \chi_{(-1,1)}(u_\varepsilon(\varepsilon(\cdot) + x_\varepsilon)) dx \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathcal{L}^n(B_1(0) \cap \{|u_\varepsilon(\varepsilon(\cdot) + x_\varepsilon)| < 1\}) \end{aligned}$$

と計算できる. Classical な状況では, ポテンシャル項の影響により $u_\varepsilon \approx \pm 1$ ならエネルギーが非常に小さくなることから, $x_\varepsilon \in \{|u_\varepsilon| < 1/2\}$ のように制限した領域からとることができる. よって橢円型方程式の標準的な評価をリスケーリングした関数に適用することで, ある程度小さいボール上では上記の不等式でのポテンシャル項は下から抑えられる. この戦略は, 自由境界型は“自由境界がある”ゆえに適用することができない. 具体的には, 自由境界の存在により標準的な橢円型の評価が成り立たず, u_ε はせいぜいリップシツ連続であることしか保証できない問題がある. またポテンシャル項の形もただの特性関数であり, $u_\varepsilon \approx 0$ であろうが $u_\varepsilon \approx \pm 1$ であろうがエネルギーの値に変わりがないということも問題になる. この問題に対して自由境界型で証明できる, 以下の命題を使うことで密度が 0 になると矛盾するという戦略を取った. これが本稿で紹介した定理の証明の一番のアイデアである.

Proposition. ある定数 $c = c(n) > 0$ が存在し, 次が成り立つ: 任意の

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_{2r}(0) \cap \{u > 0\}, \\ |\nabla u| = 1 & \text{on } B_{2r}(0) \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases}$$

の解である u が $|\nabla u| \leq 1$ を満たし, かつ $\mathcal{L}^n(B_{2r}(0) \cap \{u > 0\}) \leq cr^n$ を満たすなら $\{u > 0\} \cap B_r(0) = \emptyset$ である.

密度の計算で出てきた $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathcal{L}^n(B_1(0) \cap \{|u_\varepsilon(\varepsilon \cdot) + x_\varepsilon| < 1\})$ が 0 であると仮定してみる. このとき次の L^1 -Lip 補間不等式

$$\|u\|_{L^\infty(B_1(0))} \leq C \max \left\{ \|u\|_{L^1(B_1(0))}^{1/(n+1)} \|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))}^{n/(n+1)}, \|u\|_{L^1(B_1(0))} \right\}$$

を用いることで, 例えは $(u_\varepsilon(\varepsilon \cdot) + x_\varepsilon) + 1)/2$ に対して $B_1(0)$ 内で Proposition が使える状況に持ち込むことができる. この Proposition によると $x = 0$ ではリスケーリングした後の関数の値が 0 となる, つまり $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \pm 1$ になることがわかるがこれは矛盾である. 以上が証明の概略となる.

5 今後の展望

Section 2 で説明したように, この定理の直接的な応用先として, Yau の予想があげられる. そのためにはまず自由境界 Allen–Cahn 方程式の解のうち, モース指数が有限なものを研究する必要がある. 従来の研究は最小化関数あるいは安定な関数に対するものが主であり, 特に自由境界の正則性については未知な部分が多い. 解がどうあるべきか, そして通常の Allen–Cahn 方程式の解とどのような点では類似した性質を持ち, どのような違いが見出せるかは重要な課題といえよう.

またごく最近, 本稿の著者と Jingeon An 氏の共著で放物型の自由境界 Allen–Cahn 方程式についての研究を行った ([AT25b]). 放物型問題は楕円型と比べると非常に研究が少なく, 完全なブルーオーシャンと言ってよい状況である. 日本ではこのような問題に取り組む研究者は少ないため, 本稿で興味を持っていただければ幸いである.

参考文献

- [利根川 05] 利根川 吉廣: 2 相分離問題への幾何学的測度論の応用, 数学, 57:(2), 178–196, (2005).
- [All72] W. K. Allard. On the First Variation of a Varifold. *Ann. of Math.*, 95(3):417–491, (1972).
- [An25] J. An. Second Order Estimates for a Free Boundary Phase Transition. (2025). arXiv preprint, arXiv:2507.03810.
- [AT25a] J. An and K. Tashiro. Varifold Convergence of Free Boundary Allen–Cahn Equation. (2025). arXiv preprint, arXiv:2511.01204.
- [AT25b] J. An and K. Tashiro. Parabolic Free Boundary Phase Transition and Mean Curvature Flow. (2025). arXiv preprint, arXiv:2512.14437.
- [CC95] L. Caffarelli and A. Córdoba. Uniform Convergence of a Singular Perturbation Problem. *Commun. Pure Appl. Math.*, 48(1):1–12, (1995).
- [CC06] L. Caffarelli and A. Córdoba. Phase Transitions: Uniform Regularity of the Intermediate Layers. *J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal)*, 2006(593):209–235, (2006).

- [CFRFS25] H. Chan, X. Fernández-Real, A. Figalli, and J. Serra. Global Stable Solutions to the Free Boundary Allen–Cahn and Bernoulli Problems in 3D are One-Dimensional. *arXiv preprint arXiv:2503.21245*, (2025).
- [CM20] O. Chodosh and C. Mantoulidis. Minimal Surfaces and the Allen–Cahn Equation on 3-manifolds: Index, Multiplicity, and Curvature Estimates. *Ann. of Math.*, 191(1):213–328, (2020).
- [De09] D. De Silva. Existence and Regularity of Monotone Solutions to a Free Boundary Problem. *Amer. J. Math.*, 131(2):351–378, (2009).
- [DGW22] Z. Du, C. Gui, and K. Wang. Four End Solutions of a Free Boundary Problem. *Adv. Math.*, 404(108395), (2022).
- [HT00] J. E. Hutchinson and Y. Tonegawa. Convergence of Phase Interfaces in the Van der Waals–Cahn–Hilliard theory. *Cal. Var. Partial Differ. Equ.*, 10(1):49–84, (2000).
- [Kam13] N. Kamburov. A Free Boundary Problem Inspired by a Conjecture of De Giorgi. *Commun. Partial Differ. Equations*, 38(3):477–528, (2013).
- [LWW18] Y. Liu, K. Wang, and J. Wei. On a Free Boundary Problem and Minimal Surfaces. In *Annales de l’IHP Analyse non linéaire*, volume 35, pages 993–1017, (2018).
- [MM77] L. Modica and S. Mortola. Un Esempio di Γ -Convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B*, 14:285–299, (1977).
- [Mod87] L. Modica. The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 98(2):123–142, (1987).
- [Son23] A. Song. Existence of Infinitely Many Minimal Hypersurfaces in Closed Manifolds. *Ann. of Math.*, 197:(3), 859–895, (2023).
- [Val04] E. Valdinoci. Plane-like Minimizers in Periodic Media: Jet Flows and Ginzburg-Landau-type Functionals. *J. Reine Angew. Math.*, 2004(574):147–185, (2004).
- [Val06] E. Valdinoci. Flatness of Bernoulli Jets. *Math. Z.*, 254(2):257–298, (2006).
- [Vel23] B. Velichkov, Regularity of the One-phase Free Boundaries, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer Cham, 2023.
- [Wan15] K. Wang. The Structure of Finite Morse Index Solutions to Two Free Boundary Problems in \mathbb{R}^2 . *arXiv preprint, arXiv:1506.00491*, (2015).
- [WW19a] K. Wang and J. Wei. Finite Morse Index Implies Finite Ends. *Commun. Pure Appl. Math.*, 72(5):1044–1119, (2019).
- [WW19b] K. Wang and J. Wei. Second Order Estimate on Transition Layers. *Adv. Math.*, 358(106856), (2019).